جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الدوال محدودة التغير
للفصل الأول للعام 2014/2013
السنة الثالثة - رياضيات

اسم الطالب :
الدرجة : 100
المدة : ساعتان

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك ا (تمنع الآلة الحاسبة)

السؤال الأول(33 د): (أ) – بين فيما إذا كانت دالة ديريخليه ذت م على الفترة $[\sqrt{2},5]$ و ما هو تغيرها الكلي، ثم أنها تساوي الصفر تقريباً في كل مكان على نفس الفترة ، و هل يمكن أن تكون مستمرة مطلقاً عليها ؟ مع ذكر السبب .

(ب) –ناقش مع التوضيح ،فيما إذا كانت دالة الجزء الصحيح اشتقاقية على الفترة $[0,9]$- مستمرة تقريباً في كل مكان و القيوسية لها على تلك الفترة.

– ابحث في إمكانية أن يكون صف المجموعات المفتوحة جبر تام – جبر مع ذكر قياس $\lambda(Q)$ مع التعليل ؟ .

(ج) –أوضح أن الدالة $y=\sqrt{x}$ مستمرة مطلقاً حسب التعريف على الفترة $[0,1]$ ، ثم علل هل يلزم أن يكون مشتقها محدوداً عليها إذا كانت ذت م ، و ما هو تغيرها الكلي.

السؤال الثاني(34 د): (أ) – إذا كانت الدالة f ذ ت م و قيوسة على $[a,b]$،فاثبت أن الدالة f^2 قيوسة و ذ ت م على تلك الفترة حسب التعريف للمفهومين ، ثم اكتب صيغة دالة التغير لها على نفس الفترة مع ذكر خاصتين لهذه الدالة .

(ب) –بين أن الدالة المميزة للمجموعة $A\subseteq E$ قيوسة على E إذا كانت A مقيسة ، ثم إحسب تكامل ليبيغ لها على الفترة $[0,1]$ بعد التأكد من وجوده .

(ت) –أعط مثالاً على دالة f ذ ت م و g دالة متزايدة على فترة مثل $[a,b]$ ، بحيث أن الدالة $|f|$ كمولة حسب مفهوم ستيلجس بالنسبة ل g ، بينما التكامل : $\int_a^b f\,dg$ غير موجود على هذه الفترة .

– احسب قيمة تكامل ستيلجس التالي : $K=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx^2$ علماً أنه موجود .

السؤال الثالث(33 د): (أ) –بين أن الدوال التالية (وعلى كل فترة تقابلها) :

$x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$; $f_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n$, $f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n((1+x)e)^{-n}$ حيث $x\in]0,1[$

قيوسة ، ثم بين أن f_2 دالة تحقق شرط ليبشيز وأنها محدودة تقريباً في كل مكان عليها .

(ب)–بما كانت $X=\mathbb{N}$ ولتعد $\mu(A)=\sum_{n\in A}\frac{1}{n}$ حيث $A\in P(N)$ و $\mu(\phi)=0$ و $\alpha_n=\frac{1}{n}$ متتالية حقيقية ، والمطلوب:

1–بين أن الدالة μ قياس على $P(N)$ ، وهل هو منته أم لا ؟ و لماذا ؟ .

2–احسب قياسات المجموعات : N ، $\{2,8,32\}$ ، $\{25\}$ وفق μ ،

– إذا كانت f دالة قيوسة على E ، فاثبت أن كلاً من المجموعتين : $\{x\in E: f(x)=-\infty\}$, $\{x\in E: f(x)=\infty\}$ تكون مقيسة ، ثم علل بمثال فيما إذا كانت كل مجموعة مقيسة حسب ليبيغ يجب أن تكون محدودة و عدودة .

انتهت الأسئلة

حمص في 2014/2/12

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح مدرس المقرر: د. محمد عامر

نموذج درجات مقرر التكامل المحدود (النهائي)

جامعة [illegible] — كلية العلوم — قسم الرياضيات

الفصل الأول للعام $\frac{2013}{2014}$ — السنة الثالثة - رياضيات

الدرجة: 100

[illegible] ٢٦

السؤال الأول (33 درجة) أ) لنبرهن أن دالة ديريكليه ليست ذات تغير محدود على الفترة المعطاة $[\sqrt{2}, 5]$ وذلك بتجزئة هذه الفترة بواسطة نقاط [illegible] بحيث تحوي [illegible] الفترة أعداداً [illegible] نعرف دالة ديريكليه كما يلي :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 , & x \in \mathbb{Q} \\ 0 ; & x \in \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

(12)

$$V(\varphi, P) = \sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| = n$$

حيث n عدد صحيح بالتالي نستطيع أنه من أجل أي عدد موجب M مهما كان كبيراً فإنه [illegible] اختيار تجزئة للفترة $[\sqrt{2}, 5]$ تحوي عدداً صحيحاً n كبيراً بالقدر الكافي بحيث

$$V(\varphi, P) = n > M \Rightarrow \overset{5}{\underset{\sqrt{2}}{V}}(\varphi) = \infty$$

- إثبات أن $\varphi(x) \overset{a.e}{=} 0$ بالشكل [illegible] أنها تساوي الصفر تقريباً في كل مكان [illegible] الفترة $[\sqrt{2}, 5]$ [illegible] تساوي الصفر [illegible] الدالة [illegible] الصفر في الفترة $[\sqrt{2}, 5]$
- [illegible] مستمرة [illegible] الفترة [illegible] نقطة .

(11)

ب) - دالة الجزء الصحيح، $E(x) = [x]$ [illegible] مستمرة في الفترة $[0, 9]$ [illegible] حيث [illegible] عدد صحيح [illegible] مستمرة تقريباً في كل مكان [illegible] النقاط التي [illegible]
[illegible] ١٢ [illegible] محدودة [illegible] :
- [illegible] $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ [illegible]

(10)

ج) [illegible] $\sqrt{2}$ [illegible] $[0, 1]$ [illegible] $[a_k, b_k]$ [illegible] $\varepsilon > 0$ [illegible] $\delta > 0$ [illegible] $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ [illegible]

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon \Leftarrow \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

$V(y) - 1$

- [illegible] الفترة [illegible]

/19

(2)

السؤال الثاني ([illegible] 3)

f^2 [illegible] f ، P_1 [illegible] $[a,b]$ [illegible] $[a,b]$ [illegible]

$$V(f^2, P_1) = \sum_{k=1}^{n} |f^2(x_k) - f^2(x_{k-1})| = \sum_{k=1} |f(x_k) - f(x_{k-1})|\,|f(x_k) + f(x_{k-1})|$$

$$\le 2k \sum_{k=1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = 2k\, V(f, P_1)$$

f [illegible] $[a,b]$ [illegible]

$$E(f^2 > c) = \begin{cases} E, & c<0 \\ E(|f|>\sqrt{c}), & c \ge 0 \end{cases} \quad c \in \mathbb{R}$$

[illegible]

[illegible] f [illegible] $[a,b]$ [illegible]

4

$$V_f^a(a) = 0$$

$$V_f(y) = \overset{y}{\underset{a}{V}}(f) \;;\; a < y \le b$$

[illegible] $[a,y]$ [illegible]

[illegible] A [illegible]

$$E(I_A > c) = \begin{cases} E; & c<0 \\ A; & 0 \le c < 1 \\ \phi; & c \ge 1 \end{cases} \;;\; \forall c \in \mathbb{R}$$

10

[illegible] c [illegible]

$$\int_{E=[0,1]} I_A(x)\, d\lambda = \int_A + \int_{E-A} = \lambda(E)$$

[illegible]

(ب) - مثال [illegible] $g(x) = x$ [illegible] $E=[0,1]$ [illegible]

[illegible] $[a,b]$ [illegible]

10

$$f = \begin{cases} 1 \;; & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ -1 \;; & x \in [a,b] \cap \bar{\mathbb{Q}} \end{cases} \Rightarrow |f| = 1 \;,\; x \in [a,b]$$

[illegible] $|f|$ [illegible] g [illegible]

[illegible] $[a,b]$ [illegible]

$$K = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

[illegible] $x = \pi - t$ ، t ~ π إلى 0 [illegible]

$$K = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\, dt - \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1+\cos^2 t}\, dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\, dt = \dots \frac{\pi^2}{4}$$

[illegible]

انتهى .

(٥)

السؤال الثالث (33)

أ) f_1 ، f_2 ... الدالة f ... $]0,1[$ ... $[0,1]$ ...

... المستمرة ... $[0, \frac{1}{2}]$.

... الشرط ... المعروف ...

5

$$|f_2(y) - f_2(x)| = \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)} \leq (1)(1)\,|x-y| = |x-y|$$

... $\lambda = 1$ ... ثابتاً .

ب) ١) ... $[0, \frac{1}{2}]$

... $\mu(\phi) = 0$ ... $P(N)$ ...

$$\mu(X) = \mu(N) = \sum_{n \in N} \frac{1}{n}$$

... $\frac{1}{n}$ ...

$\mu(X) < \infty$ ... $\mu(A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}$, $\mu(\{25\}) = \frac{1}{25}$, $\mu(N) = \infty$

... f ... E ...

$$E(f = \infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f > n)$$

...

$$E(f = -\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f < -n)$$

... R ...

17

التصحيح ١٦/٦/٢٠١٤

التوقيع

د. ...